▶**R04** [réservé aux XP] Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x \, dx \quad et \quad K = \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx$$

Corrigé

Il faut garder à l'esprit que, pour tout réel x : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ce qui incite à chercher à calculer $I + K$. D'autre part, $I - K$ va faire intervenir $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, ce qui incite à calculer $I - K$.

On a d'une part :

$$I + K = \int_0^\pi e^x \cos^2 x \, dx + \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^\pi (e^x \cos^2 x + e^x \sin^2 x) \, dx = \int_0^\pi e^x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^\pi e^x \times 1 \, dx = \int_0^\pi e^x \, dx = [e^x]_0^\pi = e^\pi - e^0 = e^\pi - 1$$

Et d'autre part, on a :

$$I - K = \int_0^\pi e^x \cos^2 x \, dx - \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^\pi (e^x \cos^2 x - e^x \sin^2 x) \, dx = \int_0^\pi e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^\pi e^x \times \cos(2x) \, dx$$

Une double intégration part partie effectuée en posant $u(x) = \cos(2x)$ et $v'(x) = e^x$ pour la première, puis $u(x) = \sin(2x)$ et $v'(x) = e^x$ pour la seconde (non rédigée), donne : $I - K = \frac{e^\pi - 1}{5}$.

Il s'agit donc de résoudre le système d'inconnues I et K :

$$\begin{cases} I + K = e^\pi - 1 \\ I - K = \dfrac{e^\pi - 1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I + K = e^\pi - 1 \\ 2I = e^\pi - 1 + \dfrac{e^\pi - 1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I + K = e^\pi - 1 \\ 2I = \dfrac{5(e^\pi - 1)}{5} + \dfrac{e^\pi - 1}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I + K = e^\pi - 1 \\ 2I = \dfrac{6e^\pi - 6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I + K = e^\pi - 1 \\ I = \dfrac{3e^\pi - 3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = e^\pi - 1 - \dfrac{3e^\pi - 3}{5} \\ I = \dfrac{3e^\pi - 3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K = \dfrac{5(e^\pi - 1)}{5} - \dfrac{3e^\pi - 3}{5} \\ I = \dfrac{3e^\pi - 3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = \dfrac{2e^\pi - 2}{5} \\ I = \dfrac{3e^\pi - 3}{5} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{I = \frac{3e^\pi - 3}{5}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{K = \frac{2e^\pi - 2}{5}}$$